数理解析研究所講究録
975 巻 1996 年 1-13

ガウス型通信路の最近の問題について

山口大・工　柳　研二郎 (Kenjiro Yanagi)

次のようなフィードバックをもつ離散時間ガウス型通信路を考える.

$$Y_n = S_n + Z_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ただし $Z = \{Z_n; n = 1, 2, \ldots\}$ は雑音を表す退化していない平均 0 のガウス過程、$S = \{S_n; n = 1, 2, \ldots\}$ と $Y = \{Y_n; n = 1, 2, \ldots\}$ はそれぞれ入力信号と出力信号を表す確率過程である. 通信路は雑音のかからないフィードバックをもつとする. したがって S_n は送信するメッセージと出力信号 $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ の函数であるとして表される. レート R, 長さ n の符号語 $x^n(W, Y^{n-1})$, $W \in \{1, \ldots, 2^{nR}\}$ と復号函数 $g_n: \mathbf{R}^n \to \{1, 2, \ldots, 2^{nR}\}$ に対して、誤り確率は

$$Pe^{(n)} = Pr\{g_n(Y^n) \neq W; Y^n = x^n(W, Y^{n-1}) + Z^n\},$$

で定義される. ただし W は $\{1, 2, \ldots, 2^{nR}\}$ 上の一様分布で雑音 $Z^n = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ とは独立である. 入力信号には平均電力制限が課せられる. つまり

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[S_i^2] \leq P$$

である. またフィードバックは causal である. つまり $S_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ は $Z_1, \ldots, Z_{i-1}$ に従属している. 同様にフィードバックがない場合は S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は $Z^n = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ と独立である.
有限ブロック長容量は次のように定義される.

$$C_{n,FB}(P) = \max \frac{1}{2n} \log \frac{|R_X^{(n)} + R_Z^{(n)}|}{|R_Z^{(n)}|},$$

ただし $|\cdot|$ は行列式を表し、最大値は

$$Tr[(I + B) R_X^{(n)} (I + B^t) + B R_Z^{(n)} B^t] \leq nP \tag{1}$$

を満たす狭義下三角行列 B と 非負対称行列 $R_X^{(n)}$ についてとる. 同様にフィードバックがないときには容量 $C_n(P)$ は $B = 0$ としたときの最大値である. これらの条件の下で Cover and Pombra は次の結果を得た.

Proposition 1 (Cover-Pombra [1]) 任意の $\epsilon > 0$ に対して各 $n = 1, 2, \ldots$ でブロック長 n で $2^{n(C_{n,FB}(P)-\epsilon)}$ 個の符号語が存在して $n \to \infty$ のとき $Pe^{(n)} \to 0$ とできる. 逆に任意の $\epsilon > 0$ とブロック長 n で $2^{n(C_{n,FB}(P)+\epsilon)}$ 個の符号語からなる任意の符号の列に対しても $Pe^{(n)} \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立たない. これはフィードバックをもたない場合も成り立つ.

ここではブロック長 n を固定したとき $C_{n,FB}(P)$ と $C_n(P)$ との間の関係に興味がある. $C_n(P)$ は正確に求められている.

Proposition 2 (Gallager [5])

$$C_n(P) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{k} \log \frac{nP + r_1 + \cdots + r_k}{kr_i},$$

ただし $0 < r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_n$ は $R_Z^{(n)}$ の固有値、$k(\leq n)$ は $nP + r_1 + \cdots + r_k > kr_k$ を満たす最大整数である.

ところで $C_{n,FB}(P)$ は正確には得られないので、今まで多くの人々によって様々な形の上界が得られている.

Theorem 1 (Ebert [4], Pinsker [8], Cover and Pombra [1])

$$C_n(P) \leq C_{n,FB}(P) \leq 2C_n(P).$$

Theorem 2 (Cover and Pombra [1])

$$C_n(P) \leq C_{n,FB}(P) \leq C_n(P) + \frac{1}{2}.$$

Theorem 3 (Dembo [3], Yanagi [11])

$$C_n(P) \leq C_{n,FB}(P) \leq \frac{1}{2} \log(1 + \frac{P}{r_1}).$$

Theorem 4 (Dembo [3]) $P = \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\mu + r_i} - \sqrt{r_i})^2$ となる $\mu > 0$ に対して

$$C_n(P) \leq C_{n,FB}(P) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + \frac{\mu}{r_i}}).$$

$R_Z^{11}(k)$ を $1,\ldots,k-1$ 行 $1,\ldots,k-1$ 列からなる $R_Z^{(n)}$ の $(k-1)\times(k-1)$ 部分行列、$R_Z^{12}(k)$ を $1,\ldots,k-1$ 行、$k,\ldots,n$ 列からなる $R_Z^{(n)}$ の $(k-1)\times(n-k+1)$ 部分行列、$R_Z^{21}(k)=R_Z^{12}(k)^t$ とする．このとき次を得る．これは P が大きいとき有効である．

Theorem 5 (Yanagi [12])

$$C_n(P) \le C_{n,FB}(P) \le C_n(P_1),$$

ただし

$$P_1 = P + \sqrt{\frac{P}{n}}\{\sqrt{\sum_{k=2}^{n} \lambda_{\max}(\begin{pmatrix} R_Z^{11}(k) & R_Z^{12}(k) \\ R_Z^{21}(k) & R_Z^{21}(k)R_Z^{11}(k)^{-1}R_Z^{12}(k) \end{pmatrix})}$$
$$+\sqrt{Tr[R_Z^{(n)}] - |R_Z^{11}(2)| - \frac{|R_Z^{11}(3)|}{|R_Z^{11}(2)|} - \cdots - \frac{|R_Z^{(n)}|}{|R_Z^{11}(n)|}}\}.$$

λ_{k-1} を $R_Z^{11}(k)$ の最小固有値とする．このとき最近次の結果が得られた．これは P が小さいとき有効である．

Theorem 6

$$C_n(P) \le C_{n,FB}(P) \le C_n(P_2),$$

ただし

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{\lambda_{n-1}}{n}\{(1+\frac{P}{\lambda_{n-1}})^n - 1\} \\ &= P + \frac{1}{n}\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}\frac{P^2}{\lambda_{n-1}} + \cdots + \frac{1}{n}\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}\frac{P^n}{\lambda_{n-1}^{n-1}}. \end{aligned}$$

この Theorem を証明するには次の 4 つの Lemma を必要とする．

Lemma 1 $R_X = \{x_{ij}\}$ を $n\times n$ 共分散行列, $\boldsymbol{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} & x_{2k} & \cdots & x_{k-1k} \end{pmatrix}^t$, $R_X(1,\ldots,k-1)$ を $1,\ldots,k-1$ 行と $1,\ldots,k-1$ 列からなる R_X の $(k-1)\times(k-1)$ 部分行列とする．このとき

$$R_X(1,\ldots,k-1) \ge \frac{\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k^t}{x_{kk}}$$

が成り立つ．

Proof. $R_X(1,\ldots,k-1)$ の逆行列を次のように表す.

$$R_X(1,\ldots,k)^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

ただし B_{11} は $1,\ldots,k-1$ 行と $1,\ldots,k-1$ 列からなる $R_X(1,\ldots,k)^{-1}$ の $(k-1)\times(k-1)$ 部分行列, B_{12} は $1,\ldots,k-1$ 行と k 列からなる $R_X(1,\ldots,k)^{-1}$ の $(k-1)\times 1$ 部分行列, $B_{21}=B_{12}^t$, さらに B_{22} は (k,k) 成分からなる $R_X(1,\ldots,k)^{-1}$ の部分行列である. $B_{11}\geq 0$ だから

$$B_{11}^{-1} = R_X(1,\ldots,k-1) - \frac{\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k}{x_{kk}} \geq 0.$$

$\square$

Lemma 2

$$x_{kk} - \boldsymbol{x}_k^t R_{X+Z}(1,\ldots,k-1)^{-1}\boldsymbol{x}_k \geq \frac{|R_Z(1,\ldots,k-1)|x_{kk}}{|R_Z(1,\ldots,k-1)+\frac{\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k}{x_{kk}}|}$$

Proof. Lemma 1 より

$$R_{X+Z}(1,\ldots,k-1) \geq \frac{\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k^t}{x_{kk}} + R_Z(1,\ldots,k-1) > 0.$$

したがって

$$-R_{X+Z}(1,\ldots,k-1)^{-1} \geq -(\frac{\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k^t}{x_{kk}} + R_Z(1,\ldots,k-1))^{-1}.$$

ここで

$$R = \frac{\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k}{x_{kk}} + R_Z(1,\ldots,k-1)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
& x_{kk} - \boldsymbol{x}_k^t R_{X+Z}(1,\ldots,k-1)^{-1}\boldsymbol{x}_k \\
\geq\ & x_{kk} - \boldsymbol{x}_k^t R^{-1}\boldsymbol{x}_k \\
=\ & \frac{|R|\{x_{kk} - \boldsymbol{x}_k^t R^{-1}\boldsymbol{x}_k\}}{|R|} \\
=\ & \frac{\begin{vmatrix} R & \boldsymbol{x}_k \\ \boldsymbol{x}_k^t & x_{kk} \end{vmatrix}}{|R|} \\
=\ & \frac{|R - \frac{\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k^t}{x_{kk}}|x_{kk}}{|R|} \\
=\ & \frac{|R_Z(1,\ldots,k-1)|x_{kk}}{|R|}.
\end{aligned}$$

□

Lemma 3

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

を正定値対称行列とする. λ を A の最小固有値, μ を A_{11} の最小固有値とすると, $\lambda \leq \mu$ が成り立つ.

Proof.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

を A の逆行列とする.

$$A_{11}^{-1} = B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21} \leq B_{11}$$

だから

$$\frac{1}{\mu} = ||A_{11}^{-1}|| \leq ||B_{11}||.$$

一方

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= ||A^{-1}|| = \sup\{< \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} >;\ ||\boldsymbol{f}|| = 1\} \\ &\geq \sup\{< \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix} >;\ ||\boldsymbol{x}|| = 1\} \\ &= \sup\{< B_{11}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >;\ ||\boldsymbol{x}|| = 1\} \\ &= ||B_{11}||. \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{1}{\mu} \leq ||B_{11}|| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

ゆえに $\lambda \leq \mu$ を得る. □

Lemma 4

$$y_1 + \frac{y_2}{1+y_1} + \frac{y_3}{1+y_1+y_2} + \cdots + \frac{y_n}{1+y_1+\cdots+y_{n-1}} \leq Q$$

を満たす $y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$ に対して $y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ の最大値は $(1+\dfrac{Q}{n})^n - 1$ である.

Proof.

$$y_n \leq (Q - y_1 - \frac{y_2}{1+y_1} - \cdots - \frac{y_{n-1}}{1+y_1+\cdots+y_{n-2}})(1+y_1+\cdots+y_{n-1})$$

だから $y_1+y_2+\cdots+y_n$ は

$$y_{n-1} = \frac{1}{2}(1+y_1+y_2+\cdots+y_{n-2})(Q - y_1 - \cdots - \frac{y_{n-2}}{1+y_1+\cdots+y_{n-3}})$$

のとき最大となる．最大値は

$$\frac{1}{4}(1+y_1+y_2+\cdots+y_{n-2})(Q - y_1 - \cdots - \frac{y_{n-2}}{1+y_1+\cdots+y_{n-3}} + 2)^2 - 1$$

となる．これは

$$y_{n-2} = \frac{1}{3}(1+y_1+\cdots+y_{n-3})(Q - y_1 - \cdots - \frac{y_{n-3}}{1+y_1+\cdots+y_{n-4}})$$

のとき最大となる．最大値は

$$\frac{1}{27}(1+y_1+\cdots+y_{n-3})(Q - y_1 - \cdots - \frac{y_{n-3}}{1+y_1+\cdots+y_{n-4}})^3 - 1$$

となる．この手順を繰り返していけば

$$y_1+y_2+\cdots+y_n$$

の最大値は

$$(1+\frac{Q}{n})^n - 1$$

となる．ただし

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{Q}{n} \\ y_2 &= \frac{Q}{n}(1+\frac{Q}{n}) \\ y_3 &= \frac{Q}{n}(1+\frac{Q}{n})^2 \\ &\vdots \\ y_n &= \frac{Q}{n}(1+\frac{Q}{n})^{n-1} \end{aligned}$$

で attain される． □

Proof of Theorem 6 . 任意の狭義下三角行列 B に対して

$$Tr[B(R_X+R_Z)B^t+BR_X+R_XB^t]$$

を最小化したい.
$B=\{b_{ij};b_{ij}=0(i\leq j)\}$, $R_X=\{x_{ij}\}$, $R_Z=\{z_{ij}\}$ とおくと

$$\begin{aligned}&Tr[B(R_X+R_Z)B^t+BR_X+R_XB^t]\\ =\ &\sum_{k=2}^{n}\{\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-1}(x_{ji}+z_{ji})b_{ki}b_{kj}+2\sum_{j=1}^{k-1}x_{jk}b_{kj}\}\end{aligned}$$

となる. そこで $2\leq k\leq n$ なる k を固定して

$$\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-1}(x_{ji}+z_{ji})b_{ki}b_{kj}+2\sum_{j=1}^{k-1}x_{jk}b_{kj} \tag{2}$$

を最小化する. (2) を $b_{k\ell}$ $(1\leq\ell\leq k-1)$ で偏微分して 0 とおくと

$$b_{k\ell}=-\frac{1}{|R_{X+Z}(1,\cdots,k-1)|}\sum_{i=1}^{k-1}\tilde{y}_{\ell i}x_{ik}$$

を得る. ただし $R_{X+Z}(1,\cdots,k-1)$ は $1,\ldots,k-1$ 行と $1,\ldots,k-1$ 列 からなる R_X+R_Z の $(k-1)\times(k-1)$ 部分行列, $\tilde{y}_{\ell i}$ は $R_{X+Z}(1,\ldots,k-1)$ の (ℓ,i) 成分に対する余因子とする. したがって (2) の最小値は

$$\begin{aligned}&-\left\langle R_{X+Z}(1,\ldots,k-1)^{-1}\begin{pmatrix}x_{1k}\\x_{2k}\\ \vdots\\x_{k-1k}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_{1k}\\x_{2k}\\ \vdots\\x_{k-1k}\end{pmatrix}\right\rangle\\ =\ &-\boldsymbol{x}_k^tR_{X+Z}(1,\ldots,k-1)^{-1}\boldsymbol{x}_k\end{aligned}$$

で与えられる. ここで $\boldsymbol{x}_k=\begin{pmatrix}x_{1k}&x_{2k}&\cdots&x_{k-1k}\end{pmatrix}^t$ である. (1) は次のようになる.

$$x_{11}+\sum_{k=2}^{n}\{x_{kk}-\boldsymbol{x}_k^tR_{X+Z}(1,\ldots,k-1)^{-1}\boldsymbol{x}_k\}\leq nP.$$

Lemma 2 より

$$x_{11}+\sum_{k=2}^{n}\frac{|R_Z(1,\ldots,k-1)|x_{kk}}{|R_Z(1,\ldots,k-1)+\frac{\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k^t}{x_{kk}}|}\leq nP. \tag{3}$$

(3) の下で

$$\frac{1}{n}Tr[R_X]=\frac{x_{11}+x_{22}+\cdots+x_{nn}}{n}$$

を最大化する. $\frac{1}{n}Tr[R_X]$ を最大化するためには $2 \le k \le n$ に対して

$$\frac{|R_Z(1,\ldots,k-1)+\frac{\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k^t}{x_{kk}}|}{|R_Z(1,\ldots,k-1)|} \tag{4}$$

を最大化すればよい. $\frac{\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k^t}{x_{kk}}$ は 0 でない唯一の固有値 $Tr[\frac{\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k^t}{x_{kk}}]$ を持つので (4) の最大値は

$$1+\frac{Tr[\frac{\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k^t}{x_{kk}}]}{\lambda_{k-1}}$$

で与えられる. ただし λ_{k-1} は $R_Z(1,\ldots,k-1)$ の最小値である. Lemma 1 より

$$Tr[\frac{\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k^t}{x_{kk}}] \le Tr[R_X(1,\ldots,k-1)] = x_{11}+x_{22}+\cdots+x_{k-1k-1}.$$

したがって

$$x_{11}+\frac{x_{22}}{1+\frac{x_{11}}{\lambda_1}}+\frac{x_{33}}{1+\frac{x_{11}+x_{22}}{\lambda_2}}+\cdots+\frac{x_{nn}}{1+\frac{x_{11}+x_{22}+\cdots+x_{n-1n-1}}{\lambda_{n-1}}} \le nP$$

なる条件の下で$\frac{1}{n}Tr[R_X]$ の最大値を求めればよい. Lemma 3 より

$$x_{11}+\frac{x_{22}}{1+\frac{x_{11}}{\lambda_{n-1}}}+\frac{x_{33}}{1+\frac{x_{11}+x_{22}}{\lambda_{n-1}}}+\cdots+\frac{x_{nn}}{1+\frac{x_{11}+x_{22}+\cdots+x_{n-1n-1}}{\lambda_{n-1}}} \le nP \tag{5}$$

である. ここで $1 \le k \le n$ に対して $y_k = \frac{x_{kk}}{\lambda_{n-1}}$ とおくと (5) は

$$y_1+\frac{y_2}{1+y_1}+\frac{y_3}{1+y_1+y_2}+\cdots+\frac{y_n}{1+y_1+\cdots+y_{n-1}} \le \frac{nP}{\lambda_{n-1}} \tag{6}$$

のように表される. Lemma 4 より条件 (6) を満たす $y_1,y_2,\ldots,y_n \ge 0$ の下で

$$\frac{x_{11}+x_{22}+\cdots+x_{nn}}{n} = \frac{\lambda_{n-1}}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)$$

の最大値は

$$\frac{\lambda_{n-1}}{n}\{(1+\frac{P}{\lambda_{n-1}})^n-1\}$$

である. 最大値は

$$y_k = \frac{P}{\lambda_{n-1}}(1+\frac{P}{\lambda_{n-1}})^{k-1},\ k=1,2,\ldots,n$$

で attain される. □

最近 Cover [2] により次のような conjecture が出されている.

Theorem 7 (open problem)

$$C_n(P) \leq C_{n,FB}(P) \leq C_n(2P).$$

その他フィードバックをつけることにより容量が増加するための必要十分条件(Ihara and Yanagi [6], Yanagi [11]), 遅れのあるフィードバックをもつ離散時間ガウス型通信路の容量についての結果(Yanagi [13], [15]), さらにニューラルネットワークの根幹をなす多入力1出力通信路の容量領域の外界についての結果(Yanagi [14]) 等興味ある話題もあるが紙面の都合上割愛する.

最後に $n=2$ と $n=3$ の場合の具体的な例を挙げて上で求められた上界の中でどの上界がよい上界であるかを比較することにする.

例1 $R_Z = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $r_1 = 1, r_2 = 3, \lambda_1 = 2$

- $P_1 = P + \sqrt{\frac{P}{2}}\{\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{4 - 2 - \frac{3}{2}}\}$
- $P_2 = \frac{\lambda_1}{2}\{(1 + \frac{P}{\lambda_1})^2 - 1\} = P + \frac{P^2}{4}$
- $\mathrm{D1} = \frac{1}{2}\log(1 + \frac{P}{r_1}) = \frac{1}{2}\log(1+P)$
- $\mathrm{D2} = \frac{1}{2}\log\frac{1}{4}(1 + \sqrt{1 + \frac{\mu}{r_1}})(1 + \sqrt{1 + \frac{\mu}{r_2}}) = \frac{1}{2}\log\frac{1}{4}(1 + \sqrt{1+\mu})(1 + \sqrt{1 + \frac{\mu}{3}})$

Table 1

μ	0.5	1.0	10.0
P	0.0087212	0.0304212	1.1095945
P_1	0.159825	0.3126333	2.8139875
P_2	0.0087402	0.0306525	1.4173944
$2P$	0.0174424	0.0608424	2.219189
$C_2(P)$	$\frac{1}{4}\log 1.0174424$	$\frac{1}{4}\log 1.060824$	$\frac{1}{4}\log 3.2231926$
$C_2(2P)$	$\frac{1}{4}\log 1.0348848$	$\frac{1}{4}\log 1.1216848$	$\frac{1}{4}\log 5.9338516$
$2C_2(P)$	$\frac{1}{4}\log 1.035189$	$\frac{1}{4}\log 1.1253865$	$\frac{1}{4}\log 10.38897$
$C_2(P)+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\log 4.140756$	$\frac{1}{4}\log 4.243296$	$\frac{1}{4}\log 12.89277$
D1	$\frac{1}{4}\log 1.0175184$	$\frac{1}{4}\log 1.0617678$	$\frac{1}{4}\log 4.4503889$
D2	$\frac{1}{4}\log 1.3385006$	$\frac{1}{4}\log 1.6912396$	$\frac{1}{4}\log 11.059606$
$C_2(P_1)$	$\frac{1}{4}\log 1.31965$	$\frac{1}{4}\log 1.6252666$	$\frac{1}{4}\log 7.724825$
$C_2(P_2)$	$\frac{1}{4}\log 1.0174804$	$\frac{1}{4}\log 1.061305$	$\frac{1}{4}\log 3.8928613$

μ	20.0	100.0	1000.0
P	2.7777002	19.092932	229.376777
P_1	5.4743855	26.163005	253.88219
P_2	4.7066048	110.22794	13382.801
$2P$	5.5554004	38.185864	458.75354
$C_2(P)$	$\frac{1}{4}\log 7.6088063$	$\frac{1}{4}\log 148.30392$	$\frac{1}{2}\log 133.58544$
$C_2(2P)$	$\frac{1}{4}\log 19.028024$	$\frac{1}{4}\log 538.3012$	$\frac{1}{4}\log 266.01618$
$2C_2(P)$	$\frac{1}{4}\log 57.893933$	$\frac{1}{4}\log 21994.052$	$\frac{1}{2}\log 17845.069$
$C_2(P)+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\log 30.435225$	$\frac{1}{4}\log 593.21568$	$\frac{1}{2}\log 267.17088$
D1	$\frac{1}{4}\log 14.271018$	$\frac{1}{4}\log 403.72591$	$\frac{1}{2}\log 230.37677$
D2	$\frac{1}{4}\log 20.452128$	$\frac{1}{4}\log 359.06679$	$\frac{1}{2}\log 157.357$
$C_2(P_1)$	$\frac{1}{4}\log 18.622146$	$\frac{1}{4}\log 264.38495$	$\frac{1}{2}\log 147.73365$
$C_2(P_2)$	$\frac{1}{4}\log 14.992849$	$\frac{1}{4}\log 4198.37$	$\frac{1}{2}\log 7727.7184$

例 2 $R_Z = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $r_1 = 2-\sqrt{2}, r_2 = 2, r_3 = 2+\sqrt{2}, \lambda_2 = 1$

- $P_1 = P + \sqrt{\frac{P}{3}}\{\sqrt{\frac{5}{2} + \frac{7+\sqrt{7}}{3}} + \sqrt{6 - 2 - \frac{3}{2} - \frac{4}{3}}\}$
- $P_2 = \frac{\lambda_2}{3}\{(1+\frac{P}{\lambda_2})^3 - 1\} = P + P^2 + \frac{P^3}{3}$
- $\mathrm{D1} = \frac{1}{2}\log(1+\frac{P}{r_1}) = \frac{1}{2}\log(1+\frac{P}{2-\sqrt{2}})$
- $\mathrm{D2} = \frac{1}{3}\log\frac{1}{8}(1+\sqrt{1+\frac{\mu}{r_1}})(1+\sqrt{1+\frac{\mu}{r_2}})(1+\sqrt{1+\frac{\mu}{r_3}})$

$$= \frac{1}{3}\log\frac{1}{8}(1+\sqrt{1+\frac{\mu}{2-\sqrt{2}}})(1+\sqrt{1+\frac{\mu}{2}})(1+\sqrt{1+\frac{\mu}{2+\sqrt{2}}})$$

Table 2

μ	0.5	1.0	10.0
P	0.0101237	0.034092	1.1405571
P_1	0.2117447	0.4040843	3.2806134
P_2	0.0102265	0.0352674	2.9359998
$2P$	0.0202474	0.068184	2.2811142
$C_3(P)$	$\frac{1}{6}\log 1.0518467$	$\frac{1}{6}\log 1.174596$	$\frac{1}{6}\log 7.7010887$
$C_3(2P)$	$\frac{1}{6}\log 1.1036934$	$\frac{1}{6}\log 1.3491921$	$\frac{1}{6}\log 19.615999$
$2C_3(P)$	$\frac{1}{6}\log 1.1063814$	$\frac{1}{6}\log 1.3796757$	$\frac{1}{6}\log 59.306767$
$C_3(P)+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}\log 8.4147736$	$\frac{1}{6}\log 11.037405$	$\frac{1}{6}\log 61.608709$
D1	$\frac{1}{6}\log 1.0527477$	$\frac{1}{6}\log 1.184954$	$\frac{1}{6}\log 25.595502$
D2	$\frac{1}{6}\log 1.6760538$	$\frac{1}{6}\log 2.4715584$	$\frac{1}{6}\log 45.590561$
$C_3(P_1)$	$\frac{1}{6}\log 2.0844123$	$\frac{1}{6}\log 3.069445$	$\frac{1}{6}\log 36.812312$
$C_3(P_2)$	$\frac{1}{6}\log 1.0523731$	$\frac{1}{6}\log 1.1806156$	$\frac{1}{6}\log 30.065287$

μ	20.0	100.0	1000.0
P	2.8255303	19.208453	222.45715
P_1	6.1938762	27.990847	252.34467
P_2	18.328473	2750.5865	3719302
$2P$	5.6510606	38.416906	444.9143
$C_3(P)$	$\frac{1}{6}\log 28.091507$	$\frac{1}{6}\log 2384.8824$	$\frac{1}{6}\log 2827094.5$
$C_3(2P)$	$\frac{1}{6}\log 111.97083$	$\frac{1}{6}\log 16505.519$	$\frac{1}{6}\log 22315814.$
$2C_3(P)$	$\frac{1}{6}\log 789.13276$	$\frac{1}{6}\log 5687664.$	$\frac{1}{6}\log 2827094.5^2$
$C_3(P)+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}\log 224.73205$	$\frac{1}{6}\log 19079.059$	$\frac{1}{6}\log 22616756.$
D1	$\frac{1}{6}\log 197.49137$	$\frac{1}{6}\log 38583.215$	$\frac{1}{6}\log 55201059.$
D2	$\frac{1}{6}\log 183.00042$	$\frac{1}{6}\log 557673.6$	$\frac{1}{6}\log 5038900.7$
$C_3(P_1)$	$\frac{1}{6}\log 137.53338$	$\frac{1}{6}\log 6743.8235$	$\frac{1}{6}\log 4275194.1$
$C_3(P_2)$	$\frac{1}{6}\log 2100.169$	$\frac{1}{2}\log 1734.0209$	$\frac{1}{2}\log 2343013.5$

参考文献

[1] T. Cover and S. Pombra, "Gaussian feedback capacity", IEEE Trans. Information Theory, vol IT-35, pp 37-43, January 1989.

[2] T. Cover and B. Gopinath, Open problems in communication and computation, Springer-Verlag, New York, 1987.

[3] A. Dembo, "On Gaussian feedback capacity", IEEE Trans. Information Theory, vol IT-35, pp 1072-1089, September 1989.

[4] P. Ebert, "The capacity of the Gaussian channel with feedback", Bell. Syst. Tech. J., pp 1705-1712, 1970.

[5] R. G. Gallager, Information theory and reliable communication, John Wiley and Sons, New York, 1968.

[6] S. Ihara and K.Yanagi, "Capacity of discrete time Gaussian channel with and without feedback, II", Japan J. Appl. Math., vol 6, pp 245-258, 1989.

[7] S. Ihara, Information theory for continuous systems, World Scientific, 1993.

[8] M. Pinsker, talk delivered at the Soviet Information Theory Meeting, (no abstract published), 1969.

[9] K. Yanagi, "An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback", Lecture Notes in Math., vol 1299, pp 565-570, 1988.

[10] K. Yanagi, "On some properties of the continuous time Gaussian channels with strongly Volterra linear feedback", Proc. ISITA '92, pp 1342-1346, 1992.

[11] K. Yanagi, "Necessary and sufficient condition for capacity of the discrete time Gaussian channel to be increased by feedback", IEEE Trans. Information Theory, vol IT-38, pp 1788-1791, Nobember 1992.

[12] K. Yanagi, "An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, II", IEEE Trans. Information Theory, vol IT-40, pp 588-593, March 1994.

[13] K. Yanagi, "On the capacity of the discrete time Gaussian channel with delayed feedback", IEEE Trans. Information Theory, vol IT-41, pp 1051-1059, July 1995.

[14] K. Yanagi, "Outer bound of capacity region in m-user non-white Gaussian multiple access channel with feedback", Proceedings on the Fourteenth Symposium on Applied Functional Analysis, vol 14, pp 128-135, 1995.

[15] K. Yanagi, "On the capacity of Gaussian channel with noiseless delayed feedback", Proceedings on the Seventh Japan-Russia Symposium on Probability Theory and Mathematical Statistics, vol 7, pp 506-514, 1996.

755 山口県宇部市常盤台２５５７
山口大学工学部共通講座
TEL: 0836-35-9966 (Dial-in)
FAX: 0836-35-9492
e-mail: yanagi@po.cc.yamaguchi-u.ac.jp